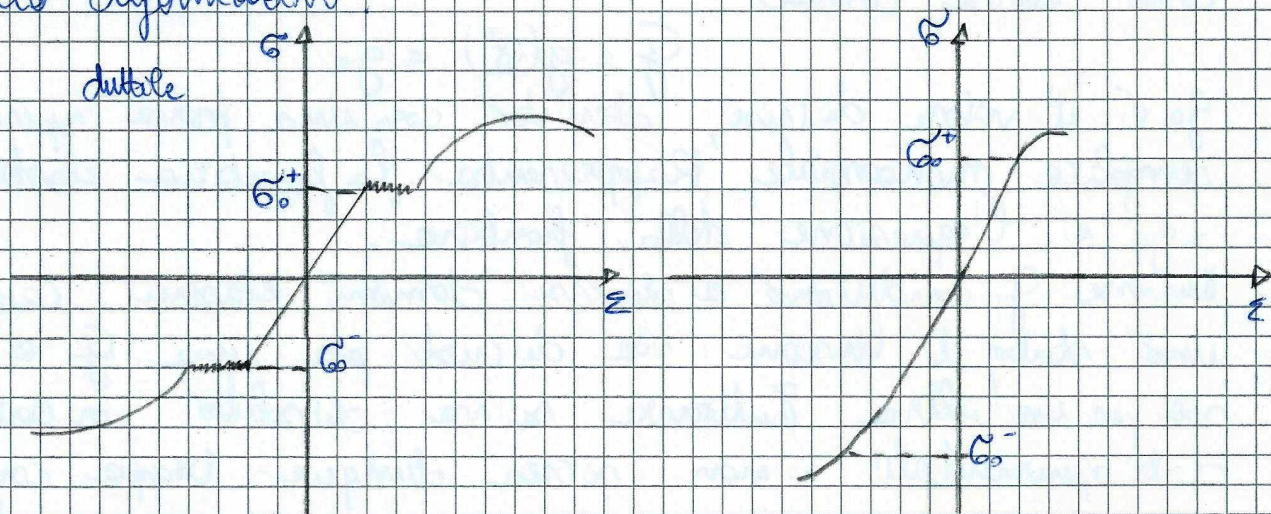


Lo stato limite elastico

30

Partiamo dall'esperienza sperimentale: lo stato limite elastico è il momento di transizione dal comportamento lineare a quello deformativo.



$$|\sigma_0^-| = \sigma_0^+$$

Simmetrico

$$\sigma_0 \approx \sigma_R$$

Asimmetrico: coincide con σ_R rottura

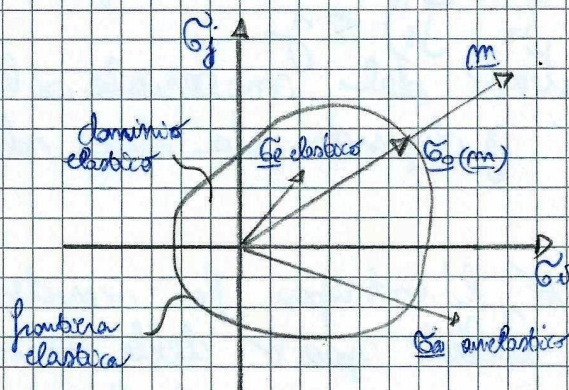
Dobbiamo definire un campo in cui il comportamento del materiale sia elastico. Definiamo il dominio elastico nel modo seguente, limitando le tensioni:

$$\sigma_0^- \leq \sigma \leq \sigma_0^+$$

La frontiera di tale dominio è costituita dall'unione dei due punti σ_0^- e σ_0^+ :

$$\{\sigma_0^-, \sigma_0^+\}$$

Ci siamo finora riferiti agli stati monassiali. Per allargare il discorso al caso pluriassiale bisognerà considerare le sei componenti di $\underline{T}$, generando dunque uno spazio astratto a 6 dimensioni. Il dominio diviene un'area, la superficie limite elastica, chiusa e convessa e con frontiera continua.



Anche nel caso di tensioni principali è necessario definire sei componenti speciali di tensione:

$$(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, m_I, m_{II}, m_{III})$$

Non si può validare sperimentalmente in modo completo la frontiera elastica (si dovrebbe però controllare infiniti punti) si elaborano modelli teorici validati sperimentalmente.

Data l'impossibilità della validazione sperimentale, si

introdurre un'opportuna grandezza scalare g , funzione del tensore e definita positiva. Si postula che lo stato limite elastico si abbia quando tale funzione g raggiunge un certo valore limite:

$$g = g(\underline{\underline{\epsilon}}) \leq g_0$$

g_0 è il valore di crisi, ottenuto con una prova sperimentale semplice monassiale. Rappresenta la frontiera elastica: $g(\underline{\underline{\epsilon}}) = g_0$ è l'equazione della frontiera.

Diverse g conducono a diversi domini elastici: capote che uno stato di tensione sia di crisi per una g e non lo sia per un'altra. Tuttavia si va di solito in accordo coi dati sperimentali e non si crea dunque troppa confusione.

La funzione di resistenza elastica $g(\underline{\underline{\epsilon}})$

Sempre nell'ipotesi di materiale isotropo, vediamo alcune proprietà della funzione $g(\underline{\underline{\epsilon}})$.

anzitutto $g(\underline{\underline{\epsilon}})$ dipende solo dalle tre tensioni principali e non dall'orientazione nello spazio:

$$g(\underline{\underline{\epsilon}}_I, \underline{\underline{\epsilon}}_{II}, \underline{\underline{\epsilon}}_{III}) \leq g_0$$

$$g(J_1, J_2, J_3) \leq g_0$$

Con $\underline{\underline{\epsilon}}_I, \underline{\underline{\epsilon}}_{II}$ e $\underline{\underline{\epsilon}}_{III}$ permutabili. g_0 si ottiene con una prova monassiale:

$$g_0 = g(\underline{\underline{\epsilon}}_0, 0, 0) = g(0, \underline{\underline{\epsilon}}_0, 0) = g(0, 0, \underline{\underline{\epsilon}}_0)$$

J_1, J_2 e J_3 sono automaticamente invarianti

Quando detto finora vale sia per i materiali fragili che per quelli duttili. Per i materiali duttili metallici (non fragili e geotecnici) lo stato di crisi dipende inoltre dalla sola parte deviatorica della tensione. I metalli giungono alla rottura per slittamento, non per altre deformazioni.

$$g(J_1', J_2', J_3') \leq g_0$$

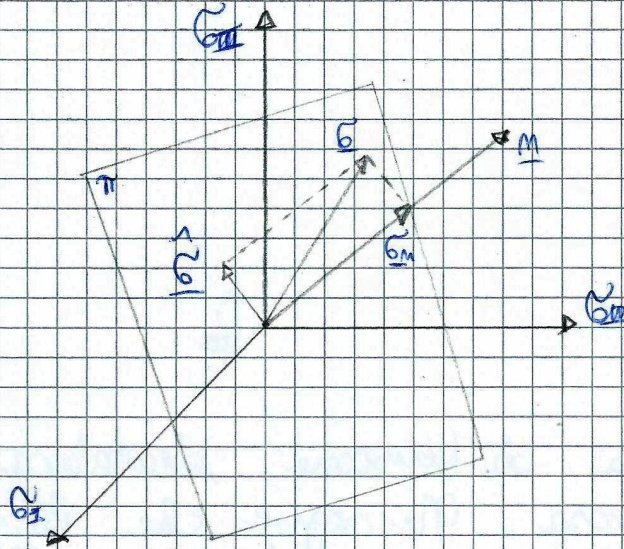
Per il comportamento simmetrico del materiale si ha $J_1' = 0$ (da $g(\underline{\underline{\epsilon}}) = g(-\underline{\underline{\epsilon}})$). Pertanto g dipende da due sole variabili.

Dal punto di vista geometrico, l'isotropia fa scendere a 3 il numero delle dimensioni dello spazio delle tensioni $\underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{\epsilon}}_I, \underline{\underline{\epsilon}}_{II}, \underline{\underline{\epsilon}}_{III})$. Essi rimane comunque astratto, non fissi, $\underline{\underline{\epsilon}}$ ed $\underline{\underline{\epsilon}}$ relativi alle tensioni principali.

Il vettore $\underline{\sigma}$ rappresenta lo stato di tensione nel punto materiale P . Esistono ∞^3 orientazioni possibili delle tensioni principali nello spazio fisico. Un materiale isotropo tuttavia non risente della variabile orientazione. Particolarmente rilevanti sono i vettori $\underline{\sigma}$ collineari con il vettore:

$$\underline{m} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\underline{k}_I + \underline{k}_{II} + \underline{k}_{III})$$

$\underline{m}$ giace sulla bisettrice del primo ottante. I vettori $\underline{\sigma}$ ortogonali a $\underline{m}$ determinano il piano deviatorico:



$$\underline{\sigma}_I = \underline{\sigma}_{II} = \underline{\sigma}_{III} \text{ su } \underline{m}$$

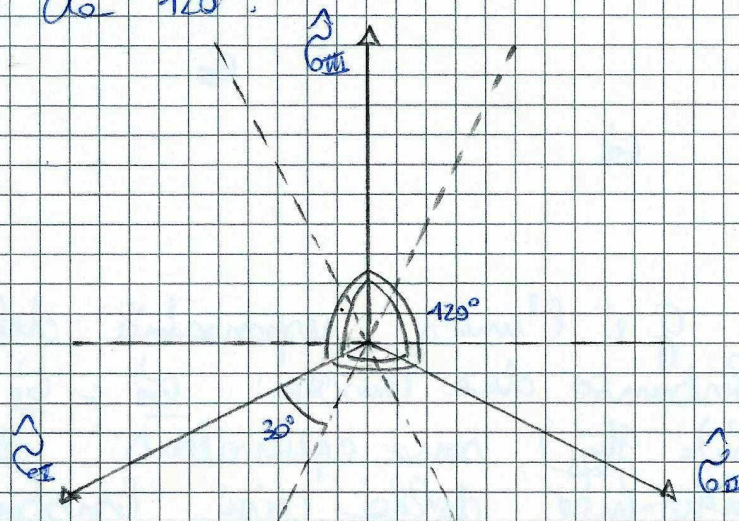
$$\underline{\sigma} \cdot \underline{m} = 0 \quad \forall \underline{\sigma} \in \pi$$

Equazione piano deviatorico:

$$\underline{\sigma}_I + \underline{\sigma}_{II} + \underline{\sigma}_{III} = 0$$

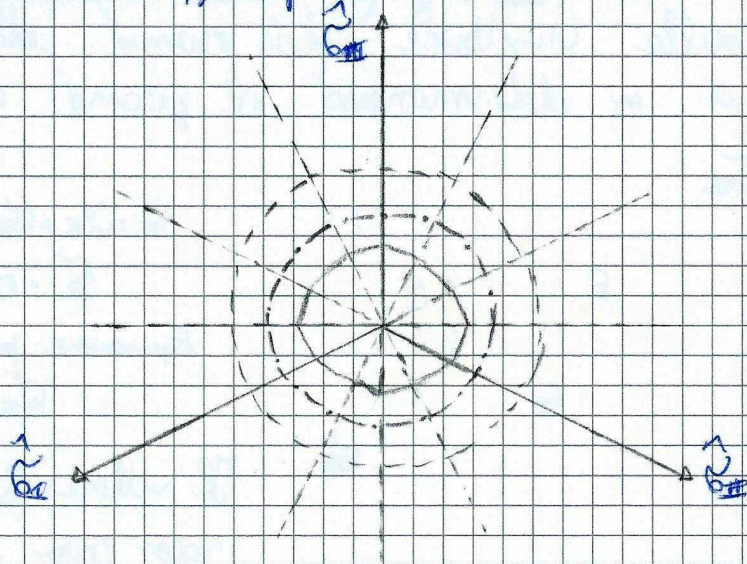
Il vettore $\underline{\sigma}$ braccato e generico, non appartiene al piano deviatorico π . Il suo componente deviatorico è $\underline{\sigma}'$, quello idrostatico è $\underline{\sigma}_m$.

$\underline{\sigma}_m$. Per seguire gli effetti deviatorici della tensione su una superficie elastica è utile proiettare tale superficie sul piano π . La proiezione è semplice da effettuare perché gli assi $\underline{\sigma}_I, \underline{\sigma}_{II}$ e $\underline{\sigma}_{III}$ formano tra loro angoli di 120° .

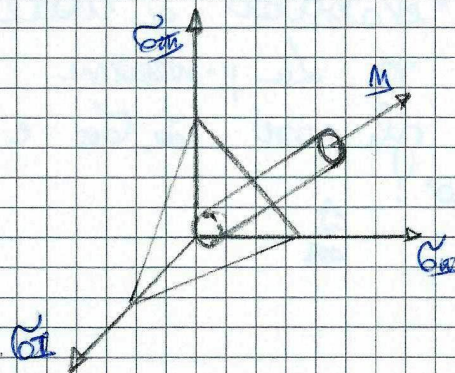


Per proiettare una superficie elastica è necessario sezionarla con piani paralleli al piano deviatorico. Essendo il materiale isotropo, le curve devono

essere simmetriche rispetto agli assi $\hat{G}_\alpha$. Inoltre, per il comportamento simmetrico di $g(\underline{\underline{G}}) = g(-\underline{\underline{G}})$, la simmetria delle curve deve valere anche rispetto alle bisettrici dei tre assi $\hat{G}_\alpha$. Quindi, avendo 12 assi di simmetria che formano angoli consecutivi di 30° , ci basterà definire le curve su un settore di 30° per conoscere tutta la rappresentazione sul piano deviatorico.



Con l'ipotesi di indifferenza di tensione idrostatica la curva non sarà sempre la stessa. Ne segue che la superficie elastica è un cilindro con generatrici parallele all'asse m deviatorico:



La tensione ideale

La grandezza g è l'unica responsabile delle crisi del materiale. Perbando due tensioni $\underline{\underline{G}}_1$ e $\underline{\underline{G}}_2$ differenti, ma tali che $g(\underline{\underline{G}}_1) = g(\underline{\underline{G}}_2)$, sono equivalenti dal punto di vista del raggiungimento della crisi. Esistono infinite tensioni appartenenti a una stessa classe di equivalenza. La più semplice è quella monassiale, individuata dall'intersezione della superficie con uno dei tre assi.

Essa è detta stress tensione ideale. È la tensione che un stato monassiale fa raggiungere a $\underline{\sigma}$ lo stesso valore che assume nello stato attuale $(\underline{\sigma}_I, \underline{\sigma}_II, \underline{\sigma}_{III})$:

$$k = g(\underline{\sigma}_I, \underline{\sigma}_II, \underline{\sigma}_{III}) = g(\underline{\sigma}_{id}, 0, 0)$$

Si può ricavare $\underline{\sigma}_{id}$ a partire dalle tensioni principali:

$$\underline{\sigma}_{id} = f(\underline{\sigma}_I, \underline{\sigma}_II, \underline{\sigma}_{III})$$

Si parla di tensione monassiale equivalente: da uno stato di tensione generico triassiale si ottiene $\underline{\sigma}_{id}$ monassiale equivalente. Si può usare tale procedimento anche per scoprire la crisi di resistenza ideale. Ricordando che la condizione di elasticità era data da $g(\underline{\sigma}) \leq g_0 = g(\underline{\sigma}_0)$, possiamo anche dire che essa è equivalentemente:

$$\text{Stato elastico} \Leftrightarrow \underline{\sigma}_{id} \leq \underline{\sigma}_0$$

Criteri di resistenza

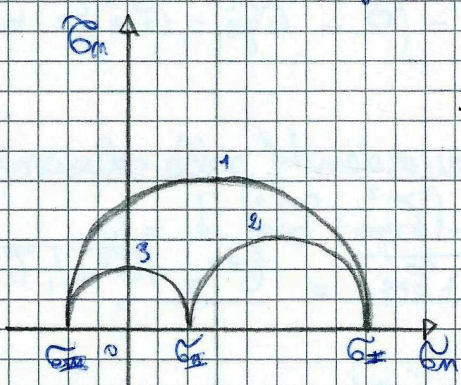
Possiamo specializzare la grandezza $g = g(\underline{\sigma})$ per ottenere criteri di resistenza. Specializzare significa privilegiare alcuni aspetti piuttosto che altri:

- criterio della tensione tangenziale massima o criterio di Tresca:

$$\underline{\tau}_{max}(\underline{\sigma}_I, \underline{\sigma}_II, \underline{\sigma}_{III}) \leq \underline{\tau}_{max}^0$$

La crisi è determinata dal raggiungimento del valore di soglia $\underline{\tau}_{max}^0$ da parte della tensione tangenziale massima $\underline{\tau}_{max}$.

Ricordando che la $\underline{\tau}_{max}$ eguaglia il raggio della circonferenza di Mohr più esterna abbiamo:



$$\begin{aligned} 1) & \frac{\underline{\sigma}_I - \underline{\sigma}_{II}}{2} & 2) & \frac{\underline{\sigma}_{II} - \underline{\sigma}_{III}}{2} \\ 3) & \frac{\underline{\sigma}_I - \underline{\sigma}_{III}}{2} = \underline{\tau}_{max} \end{aligned}$$

In questo caso $\underline{\tau}_{max}$ è legato alle tensioni principali $\underline{\sigma}_I$ e $\underline{\sigma}_{III}$.

Nel caso generale invece:

$$\underline{\tau}_{max} = \frac{1}{2} \max(|\underline{\sigma}_I - \underline{\sigma}_{II}|, |\underline{\sigma}_{II} - \underline{\sigma}_{III}|, |\underline{\sigma}_{III} - \underline{\sigma}_I|)$$

La disuguaglianza invariante ($\bar{\sigma}_{max}(\bar{\sigma}_I, \bar{\sigma}_{II}, \bar{\sigma}_{III}) \leq \bar{\sigma}_{max}$) presenta $\bar{\sigma}_{max}$. Essa può essere eliminata valutando l'equazione precedente in corrispondenza dello stato limite elastico monoassiale. Si ottiene!

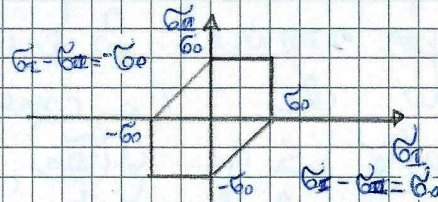
$$\bar{\sigma}_{max} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_0$$

Da cui:

$$\max(|\bar{\sigma}_I - \bar{\sigma}_{III}|, |\bar{\sigma}_{II} - \bar{\sigma}_{III}|, |\bar{\sigma}_{III} - \bar{\sigma}_I|) \leq \bar{\sigma}_0$$

Disuguaglianza che rappresenta il dominio elastico. Nel primo si ha $\bar{\sigma}_{III} = 0$ e la frontiera diventa:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_I = \pm \bar{\sigma}_0 \\ \bar{\sigma}_{II} = \pm \bar{\sigma}_0 \\ \bar{\sigma}_I - \bar{\sigma}_{II} = \pm \bar{\sigma}_0 \end{cases}$$



Possiamo anche considerare la tensione ideale:

$$(\bar{\sigma}_{id}, 0, 0) \Rightarrow \bar{\sigma}_{max} = \frac{\bar{\sigma}_{id}}{2} \quad (\text{stato monoassiale})$$

Confrontando con l'equazione di $\bar{\sigma}_{max}$:

$$\bar{\sigma}_{id} = \max(|\bar{\sigma}_I - \bar{\sigma}_{III}|, |\bar{\sigma}_{II} - \bar{\sigma}_{III}|, |\bar{\sigma}_{III} - \bar{\sigma}_I|)$$

La verifica di resistenza, sempre valida e sempre tale è:

$$\bar{\sigma}_{id} \leq \bar{\sigma}_0$$

Consideriamo ad esempio uno stato piano ($I_3 = 0$) di questo tipo:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{e lo stato di tensione alla Saint-Venant.}$$

La tensione tangenziale risultante è dunque:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \Rightarrow \hat{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_z$$

Consideriamo:

$$I_1 = \text{tr} \Pi = \bar{\sigma}_z$$

$$I_2 = -\left(0 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2\right) = \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = 0$$

L'equazione caratteristica e ricordando, nella soluzione, $\bar{\sigma}$ quoziente:

$$\lambda^3 - \bar{\sigma}_z \lambda^2 - (\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \lambda = 0$$

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{\bar{\sigma}_z \pm \sqrt{\bar{\sigma}_z^2 + 4(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}}{2} = \frac{\bar{\sigma}^2 \pm \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 4\bar{\sigma}^2}}{2}$$

Quindi:

$$\bar{\sigma}_{I,II} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma} \pm \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 4\bar{\sigma}^2})$$

$$\bar{\sigma}_{III} = 0$$

Ricordando che $\bar{\sigma}_{id}$ è uguale al raggio massimo

ma nel grafico dell'orbita si ha:

$$\sigma_{ad} = \max \left[\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \right] = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Mostriamo che $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} > \sigma$.

- criterio della tensione tangenziale massima o criterio di Huber-Von Mises-Hencky. La tensione massima è:

$$\sigma_{oth} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

Basandoci sull'ipotesi che la grandezza responsabile della crisi sia la tensione tangenziale massima σ_{oth} abbiamo:

$$\sigma_{oth}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq \sigma_{oth}^0$$

Calcolando σ_{oth} per $(\sigma_0, 0, 0)$ si ottiene:

$$\sigma_{oth}^0 = \sqrt{3} \sigma_0$$

Equivalentemente il risultato si ottiene per $\sigma_{oth}^0 = \sigma_{oth}(\sigma_0, 0, 0) = \sigma_{oth}(0, \sigma_0, 0) = \sigma_{oth}(0, 0, \sigma_0)$. Quindi:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \leq 2\sigma_0^2$$

Sulla frontiera vale l'uguaglianza, che corrisponde ad un cilindro circolare retto con asse elastico n . Considereremo solo stati principali, cioè con σ_{II} e σ_{III} variabili e $\sigma_{III} = 0$. Si ottiene quindi un'ellisse che ha come assi le bisettrici del sistema (σ_I, σ_{II}) .

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_I^2 \leq 2\sigma_0^2 \Rightarrow 2\sigma_I^2 + 2\sigma_{II}^2 - 2\sigma_I\sigma_{II} \leq 2\sigma_0^2$$

$$\Rightarrow \sigma_I^2 - \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2 \leq \sigma_0^2$$

Con la stessa verifica di resistenza $\sigma_{ad} \leq \sigma_0$

Ricaviamo σ_{ad} dall'uguaglianza:

$$\sigma_{oth}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sigma_{oth}(\sigma_{ad}, 0, 0) = \sqrt{3} \sigma_{ad}$$

Perciò:

$$\sigma_{ad} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

Nel caso particolare della tensione allo Stato di Saint Venant:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$$

Ricordiamo $\sigma_{I,II} = \frac{1}{2} (\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$, $\sigma = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$. Quindi:

$$\sigma_{ad} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})^2 + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)^2} = \sigma$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2 + \frac{\sigma^2}{4} + \frac{1}{4}(\sigma^2 + 4\tau^2)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2 + \frac{\sigma^2}{4} + \frac{1}{4}(\sigma^2 + 4\tau^2)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2\sigma^2 + 6\tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

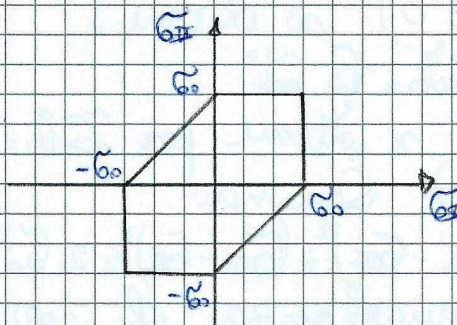
Risumando:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_0$$

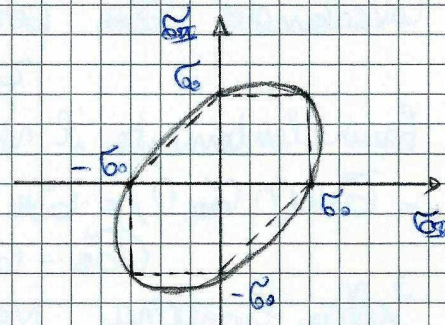
σ_0 è la tensione monoassiale di riferimento. Il 3 sotto radice, coefficiente di τ^2 , è rappresentativo del caso Huber-von Mises-Hencky. Nel caso di Tresca si ha 4, non 3.

Confrontiamo graficamente i due metodi vibbi:

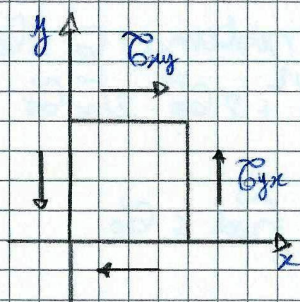
ESAGONO TRESCA



ELLISSE H-M-H



L'esagono è più restrittivo dell'ellisse: l'area è minore. Vediamo il caso di puro taglio:



$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{1,2} = \begin{cases} \sqrt{3}\tau & \tau \leq \tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \\ 2\tau & \tau \leq \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} \end{cases}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau^2}}{2}, \quad \sigma_m = 0$$

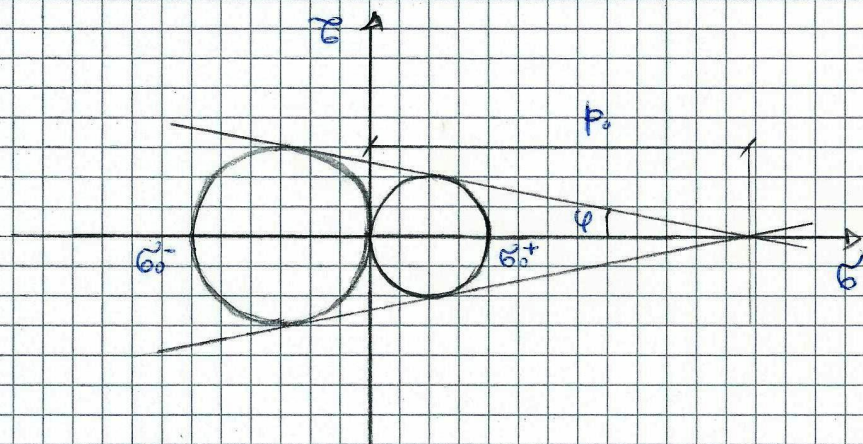
Il criterio di H-M-H è suscettibile di interpretazione energetica:

$$e = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\epsilon}} = \underbrace{e_v}_{\text{volumetrica (cambio di volume)}} + \underbrace{e_d}_{\text{distorsione (cambio di forma)}}$$

è il criterio dell'energia di distorsione elastica.

Il criterio di Mohr

È un criterio semi-sperimentale valido per materiali non metallici. È stato ideato da Mohr e da Coulomb. Dobbiamo disegnare i due cerchi di Mohr legati alle prove di trazione e di compressione (in realtà si possono usare molte più prove). Si disegna poi la curva (nel nostro caso due rette) tangente alle circonferenze:



In cui p_0 è la tensione di crisi idrostatica, φ è l'angolo di attrito solido. Le due rette rappresentano la curva intrinseca del materiale, che separa le circonferenze rappresentative degli stati elastici da quelle rappresentative degli stati anelastici.

Il metodo delle tensioni ammissibili

Dopo i cenni sul criterio di Mohr vediamone alcuni su questo metodo, usato in ambito tecnico anche se non più contemplato dalle normative. È comunque molto utile ed è un metodo di verifica di resistenza del materiale di livello zero o deterministico.

Si impone:

$$\gamma_m \geq 1$$

$$\sigma_{ed} \leq \sigma_{amm} := \frac{\sigma_p}{\gamma_m}$$

γ_m è il coefficiente di sicurezza del materiale. In ambito ingegneristico si vuole rimanere lontani non solo dalle crisi del materiale, ma anche da quella incerta. Ciò per ragioni di sicurezza. Se conosco bene il materiale posso imporre (detta σ_s tensione di sicurezza):

$$\sigma_{ed} \leq \sigma_{amm} = \sigma_s \quad \text{e per simmetria} \quad |\sigma_{ed}| \leq \sigma_{amm}$$